Гамильтонов формат принципа максимума Понтрягина
Hamiltonian format of Pontryagin's maximum principle

Гамкрелидзе Р.В.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Москва, Россия
e-mail: gam@mi.ras.ru

Гамильтонов формат является родным форматом принципа максимума для получения семейства экстремалей произвольной оптимальной задачи, независимо от ее структурных свойств, в частности, независимо от того, регулярна задача или нет.

Он заключается в том, что по оптимальной задаче канонически выписывается гамильтонова система, содержащая управляющие параметры, которая затем решается совместно с условием максимума Понтрягина, позволяющим динамически "исключать" параметры в процессе становления траектории и, при заданных начальных условиях, однозначно определить, вообще говоря, экстремали задачи.

Таким образом, семейство экстремалей оптимальной задачи генерируется принципом максимума в виде решения соответствующей гамильтоновой системы с параметрами совместно с условием максимума, а не в виде гамильтонова потока, т. е. семейства решений некоторой гамильтоновой системы дифференциальных уравнений, к которой в регулярном случае сводится уравнение Эйлера-Лагранжа в классическом вариационном исчислении. Гамильтонов формат является родным для принципа максимума, в то время как метод Эйлера-Лагранжа сводится к гамильтонову формату лишь в регулярном случае.

В этом заключается одно из основных преимуществ принципа максимума перед методом Эйлера-Лагранжа, даже если ограничиться классическими вариационными задачами, т. е. оптимальными задачами с открытым множеством допустимых значений управляющего параметра. В классическом методе получения экстремалей уравнение Эйлера-Лагранжа, которое не разрешено относительно второй производной, приводится преобразованием к каноническим координатам, (т. е. отображением касательного расслоения конфигурационного многообразия на кокасательное расслоение), к гамильтонову (следовательно, к нормальному) виду, что возможно только в случае регулярной вариационной задачи, и тем самым семейство всех решений вариационной задачи (с произвольными начальными данными) включается в поток гамильтоновой системы.

Я приведу здесь инвариантную формулировку гамильтонова формата для задачи быстродействия, к которой легко сводится общая оптимальная задача с произвольным минимизируемым функционалом интегрального типа.

Пусть уравнение управляемой системы имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u) = X,$$

где X — векторное поле на конфигурационном многообразии M, $x \in M$, u — управляющий параметр с множеством допустимых значений U. Векторному полю X канонически соответствует скалярнозначная функция на кокасательном расслоении T^*M, $H_X = H_X(\xi, u)$, $\xi \in T^*M$, зависящая от параметра $u \in U$, причем она линейна на слоях $T^*_xM \subset T^*M$, $x \in M$. Следовательно, задаче быстродействия канонически соответствует семейство (зависящее от управляющего параметра) гамильтоновых векторных полей $\overrightarrow{H_X}$ на T^*M, определяемое гамильтонианом H_X. Таким образом, каждое начальное значение $\xi \in T^*M$, $\xi \notin M$, определяет экстремаль задачи быстродействия как траекторию $\xi(t)$, $\xi(0) = \xi$, гамильтонова поля $\overrightarrow{H_X}$, из которого "динамически исключается" параметр $u \in U$ с помощью условия максимума

$$H_X(\xi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H_X(\xi(t), u).$$

Легко видеть, что гамильтоново поле $\overrightarrow{H_X}$, канонически определенное векторным полем X, совпадает с *векторным полем ad_X на кокасательном расслоении* T^*M, однозначно определенным условиями

$$ad_X a = Xa \quad \forall a \in C^\infty(M), \quad ad_X Y = [X, Y] \quad \forall Y \in Vect\, M.$$

Пусть $\mathcal{L}_X$ производная Ли над полем X, т. е. векторное поле на *касательном расслоении* TM, генерирующее поток на TM, равный дифференциалу e^{tX}_* потока e^{tX} на M,

$$e^{t\mathcal{L}_X} = e^{tX}_*.$$

В силу известной двойственности между потоками $e^{t\mathcal{L}_X}$ и e^{tad_X}, выраженной тождеством

$$e^{tX} < \omega, Y > = < e^{t\mathcal{L}_X}\omega, e^{tad_X}Y > \quad \forall Y \in Vect\, M,\ \omega \in \Lambda^{(1)}(M),$$

мы имеем

$$e^{tad_X} = \left(e^{-t\mathcal{L}_X}\right)^* = \left(e^{t\mathcal{L}_X}\right)^{*-1},$$

т. е. поток, генерируемый гамильтоновым полем $\overrightarrow{H_X}$, является обратным к сопряженному потоку к дифференциалу $e^{t\mathcal{L}_X}$.

Дифференцирование тождества устанавливает двойственность между $\mathcal{L}_X$ и ad_X на инфинитезимальном уровне (обобщенная формула Лейбница):

$$X < \omega, Y > = < \mathcal{L}_X \omega, Y > + < \omega, ad_X Y >$$
$$\forall Y \in Vect\, M,\ \omega \in \Lambda^{(1)}(M).$$

Сказанным гамильтонов формат принципа максимума полностью описан.

В то время как производная Ли $\mathcal{L}_X$ и задаваемый им поток — дифференциал $e^{t\mathcal{L}_X} = e_*^{tX}$ потока e^{tX}, являются, в той или иной форме, частью каждодневной математической практики, двойственное к $\mathcal{L}_X$ (гамильтоново) поле $\overrightarrow{H_X} = ad_X$ было введено Л. С. Понтрягиным как основной вычислительный инструмент для отыскания произвольных оптимальных режимов лишь в 1956 году под названием “сопряженной системы”, и в настоящее время представляет, наряду с условием максимума, основу для всех рассчетов, связанных с варьированием траекторий в оптимизационных задачах.

В честь отмечаемого нами столетия со дня рождения Л. С. Понтрягина, было бы естественным назвать векторное поле ad_X, (рассматриваемое именно как поле на T^*M, а не как дифференцирование $C^\infty(M)$ — модуля $Vect\, M$, или представление алгебры Ли $Vect\, M$ на себя), *производной Понтрягина.*