# О СИНТЕЗЕ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ И ТЕОРИИ БЫСТРЫХ УПРАВЛЕНИЙ

# ON SYNTHESIZING IMPULSE CONTROLS AND THE THEORY OF FAST CONTROLS

Куржанский А.Б. (Kurzhanski A.B.)

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,*
*Факультет вычислительной математики и кибернетики*
*Москва, 119991, РОССИЯ*

e-mail: `kurzhans@cs.msu.su, kurzhans@mail.ru`

Доклад посвящён задаче построения синтезирующих (“позиционных”) управлений в системах, допускающих импульсные воздействия конечного порядка (обобщённые “дельта-функции” и их производные). Подобные задачи, имеющие серьёзную прикладную мотивацию, рассматривались, в основном, с точки зрения программных управлений. В настоящем докладе указана возможность применения идей динамического программирования к задачам позиционного импульсного управления. Описание разрешающих стратегий синтеза управлений здесь рассматривается для систем с исходной линейной структурой, путём сочетания методов классической теории распределений с методами теории квазивариационных неравенств, свойственных гамильтонову формализму. При этом синтезированная система уже оказывается нелинейной. “Идеальные” же решения при этом таковы, что вполне управляемая система, с воздействиями, содержащими не только $\delta$-функции, но и высшие производные $\delta^{(j)}$ этих функций, может быть переведена из одного фазового состояния в другое за нулевое время. Физически реализуемые аппроксимации подобных “идеальных” решений называют “быстрыми управлениями”. Они позволяют достигать указанной выше цели управления за сколь угодно малое, конечное “нано-время”.

Так, для системы в распределениях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad (\text{supp } x(\cdot) = [\alpha, \beta], \quad \alpha < \tau \le t \le \vartheta < \beta), \quad (1)$$

с гладкими коэффициентами и с импульсными управлениями вида

$$u = u(t,x) = u^0(t) = \sum_{s=1}^{r}\sum_{j=0}^{k} q_{sj}\delta^{(j)}(t-\tau_s), \;\; \tau_s = \tau_s(t,x), \qquad (2)$$

минимизирующими выпуклый функционал вида $\varphi(x(\cdot))$ при ограничении на норму матрицы $\{q_{sj}\}$, рассматриваются физически реализуемые аппроксимации, порождаемые решением следующей задачи.

Введя обозначения

$$L_0(t) = B(t), \quad L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - \frac{dL_{j-1}}{dt}, \quad j = \overline{1,k},$$

рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_0^k L_j(s)u^{(j)}(t), \ \ t \le s \le \vartheta, \qquad (3)$$

с начальной позицией $\{\tau, x_\tau, k_\tau\}$, при совместных ограничениях:
интегральных

$$\int_\tau^\vartheta \sum_0^k \|u^{(j)}(t)\|dt \le k_\tau, \ k_\tau > 0; \ \ k(t) \ge 0, \ t \in (\tau, \vartheta]$$

и геометрических

$$\|u(s)^{(j)}\| \le \mu_j, \ \mu_j \ge 0, \ \ \mu' = \{\mu_0, \ldots, \mu_k\}, \ \ j = 0, \ldots, k.$$

Требуется, при заданном $\mu$, найти синтезированное управление

$$u^0(t, x, k \mid \mu),$$

минимизирующее функционал $\varphi(\vartheta, x(\vartheta)) + k(\vartheta)$, где $\varphi(\vartheta, x)$ непрерывная, ограниченная снизу функция, выпуклая по $x$.

Решение данной задачи вытекает из следующего уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для функции цены

$$V(t, x, k \mid \mu) = \min_u \{\varphi(x(\vartheta)) \mid x(t) = x, \ k(t) = k, \ \|u^{(j)}(t)\| \le \mu_j\}$$

$$V_t + \min_u \left\{ \left(V_x, A(t)x + \sum_0^k L_j(t)u^{(j)}\right) + \sum_0^k \|u^{(j)}\| \ \middle| \ \|u\| \le \mu \right\} = 0,$$

с краевым условием

$$V(\vartheta, x, k \mid \mu) = \varphi(\vartheta, x), \ \ k(\vartheta) = 0.$$

Реализация $u_j^0[t \mid \mu]$ управления $u_j^0(t, x(t), k \mid \mu)$ является релейной функцией, принимающей одно из трёх значения $\{\pm\mu_j, \ 0\}$ всюду, за исключений точек переключения, где $u^0[t] \in [-\mu_j, +\mu_j]$. При надлежащих условиях на последовательности $\mu_j \to \infty$, имеет место слабая сходимость вида $L_j(t)u_j^0[t \mid \mu] \to B(t)q_{sj}\delta^{(j)}(t - \tau_s)$. Таким образом, "обыкновенные" релейные (быстрые) управления для системы (3) отображаются, при $\mu_j \to \infty$, в импульсные (мгновенные) управления вида (2) для системы (1).

Заметим, что идеальные импульсные управления могут также рассматриваться как виртуальные управления, реализующие мгновенные переключения фазовых координат и коэффициентов уравнений в математических моделях гибридных систем.

# Список литературы


[1] Красовский Н.Н., "Об одной задаче оптимального регулирования", *Прикладная математика и механика*, 21, No. 5, 670–677 (1957).

[2] Bensoussan A. and Lions J-L. *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationelles*, Paris, Dunod, (1982).

[3] Куржанский А. Б., Осипов Ю. С., "К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями", *Дифференциальные уравнения*, 5, No. 8, 1360-1370 (1969).

[4] Куржанский А. Б., "Оптимальные системы с импульсными управлениями", *Дифференциальные игры и задачи управления*, УНЦ АН СССР, 131-156 (1975).

[5] Daryin A. N., Kurzhanski,A. B. and Seleznev A. V., "A dynamic programming approach to the impulse control synthesis problem", *Proc. Joint 44th IEEE CDC-ECC 2005, Seville*, 8215-8220 (2005).